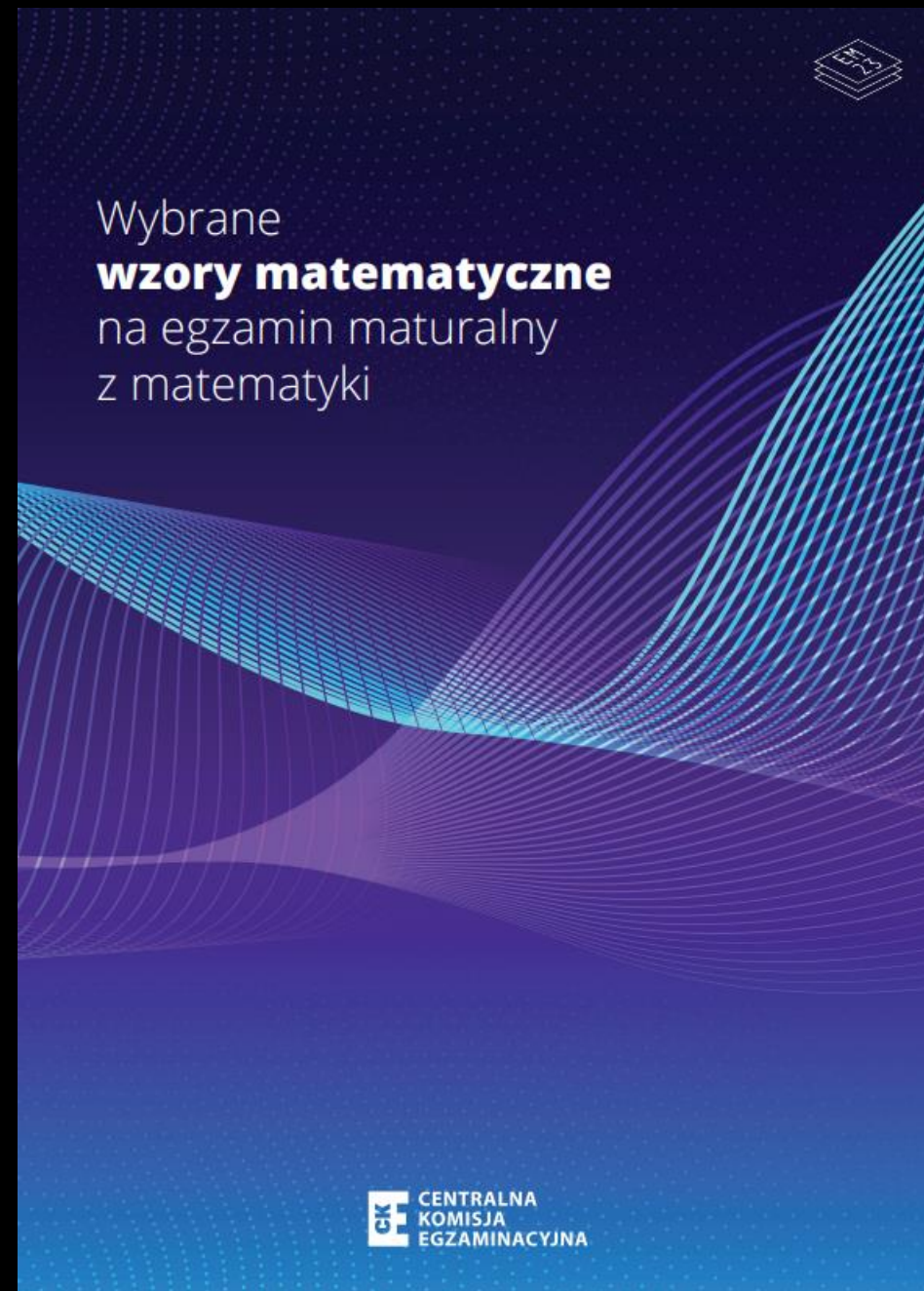


# Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki (tablice)

Andrzej Rowiński

(na podstawie tablic Centralnej Komisji Egzaminacyjnej)

Opracowanie zawiera dodatki, ułatwiające zrozumienie  
znaczenia wzorów.



# Spis treści

1. Wartość bezwzględna liczby
2. Potęgi i pierwiastki
3. Logarytmy
4. Silnia. Współczynnik dwumianowy
5. Wzór dwumianowy Newtona
6. Wzory skróconego mnożenia
7. Funkcja kwadratowa
8. Ciągi
9. Trygonometria
10. Planimetria
11. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej
12. Stereometria
13. Kombinatoryka
14. Rachunek prawdopodobieństwa
15. Parametry danych statystycznych
16. Pochodna funkcji
17. Tablica wartości funkcji trygonometrycznych
18. Dodatek

Wartość bezwzględna pozostawia liczbę dodatnią bez zmian, zaś ujemną zmienia na przeciwną. ●

Alternatywny zapis własności: ●

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \text{ i } x \geq -a \text{ czyli } x \in \langle -a, a \rangle$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ lub } x \leq -a \text{ czyli } x \in (-\infty, -a) \cup \langle a, +\infty \rangle$$

Dla nierówności ostrej ulegają zmianie końce przedziałów.

Dodatkowe informacje:

Błąd bezwzględny = |wartość dokładna – wartość przybliżona|

$$\text{Błąd względny} = \frac{\text{Błąd bezwzględny}}{\text{Wartość dokładna}}$$

Jeżeli błąd względny ma być podany w %, to wynik mnożymy przez 100%.

## 1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej  $x$  definiujemy wzorem:



$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba  $|x|$  jest to odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej  $x$  od punktu o współrzędnej 0.

- Dla dowolnej liczby  $x$  mamy:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli  $y \neq 0$ , to:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  oraz  $r \geq 0$  mamy:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

## 2. POTĘGI I PIERWIĄTKI

- Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $a$  definiujemy jej  $n$ -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym  $\sqrt[n]{a}$  stopnia  $n$  z liczby  $a \geq 0$  nazywamy liczbę  $b \geq 0$  taką, że  $b^n = a$ .

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$



Własności mogą być stosowane dla większej liczby postaw, np.

$$a^r \cdot a^s \cdot a^t = a^{r+s+t}$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Logarytm działa odwrotnie do ruchu wskazówek zegara, o czym mówią żółte strzałki.

Jeżeli  $a < 0$  oraz liczba  $n$  jest nieparzysta, to  $\sqrt[n]{a}$  oznacza liczbę  $b < 0$  taką, że  $b^n = a$ .

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech  $m, n$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla  $a \neq 0$ :  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  oraz  $a^0 = 1$

- dla  $a \geq 0$ :  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

- dla  $a > 0$ :  $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech  $r, s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki  $r, s$  są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$ .

Niech  $x, y$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli  $a \in (0, 1)$ , to nierówność  $a^x < a^y$  jest równoważna nierówności  $x > y$ .

Jeżeli  $a \in (1, +\infty)$ , to nierówność  $a^x < a^y$  jest równoważna nierówności  $x < y$ .

### 3. LOGARYTMY

Niech  $a > 0$  i  $a \neq 1$ . Logarytmem  $\log_a b$  liczby  $b > 0$  przy podstawie  $a$  nazywamy wykładnik  $c$  potęgi, do której należy podnieść  $a$ , aby otrzymać  $b$ :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x > 0, y > 0$  oraz  $r$  prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$



Silnia to po prostu krótki zapis mnożenia kolejnych liczb. ●

$$18! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 18.$$

Symbol Newtona to również kombinacja (wybór przy nieistotnej kolejności losowań):

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \bullet$$

Dodatkowe informacje: ●

$$\frac{10!}{8!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}} = 9 \cdot 10 = 90$$

lub krócej:

$$\frac{10!}{8!} = \frac{\cancel{8!} \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{8!}} = 9 \cdot 10 = 90$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  oraz  $c > 0$ , to:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy  $\log x$  oraz  $\lg x$  oznaczają  $\log_{10} x$ .

#### 4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

- Silnią liczby całkowitej dodatniej  $n$  nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do  $n$  włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że  $0! = 1$ .

Dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 0$  prawdziwa jest równość:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

- Dla liczb całkowitych  $n, k$  spełniających warunki  $0 \leq k \leq n$  definiujemy współczynnik dwumianowy  $\binom{n}{k}$  (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Prawdziwe są równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$
$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$



Umożliwia on podniesienie do dowolnej naturalnej potęgi sumy lub różnicy dwóch zmiennych (liczb). Jest to uniwersalny wzór skróconego mnożenia na  $n$  – tą potęgę sumy lub różnicy.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dodatkowe informacje (przykład):

$$\begin{aligned} x^5 - 32 &= (x - 2)(x^{5-1} - x^{5-2} \cdot 2 + x^{5-3} \cdot 2^2 - x^{5-4} \cdot 2^3 + 2^4) = \\ &= (x - 2)(x^4 - x^3 \cdot 2 + x^2 \cdot 2^2 - x^1 \cdot 2^3 + 2^4) = \\ &= (x - 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że  $32 = 2^5$ , czyli  $x$  to  $a$ ,  $2$  to  $b$ , zaś  $n = 5$ .

## 5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  mamy:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$ :

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

## 6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$ :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  mamy:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) & a^2 - 1 &= (a - 1)(a + 1) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 - 1 &= (a - 1)(a^2 + a + 1) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 + 1 &= (a + 1)(a^2 - a + 1) \\ a^n - 1 &= (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \end{aligned}$$

## 7. FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem  $\Delta$  trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ ) zmiennej rzeczywistej  $x$  nazywamy liczbę

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

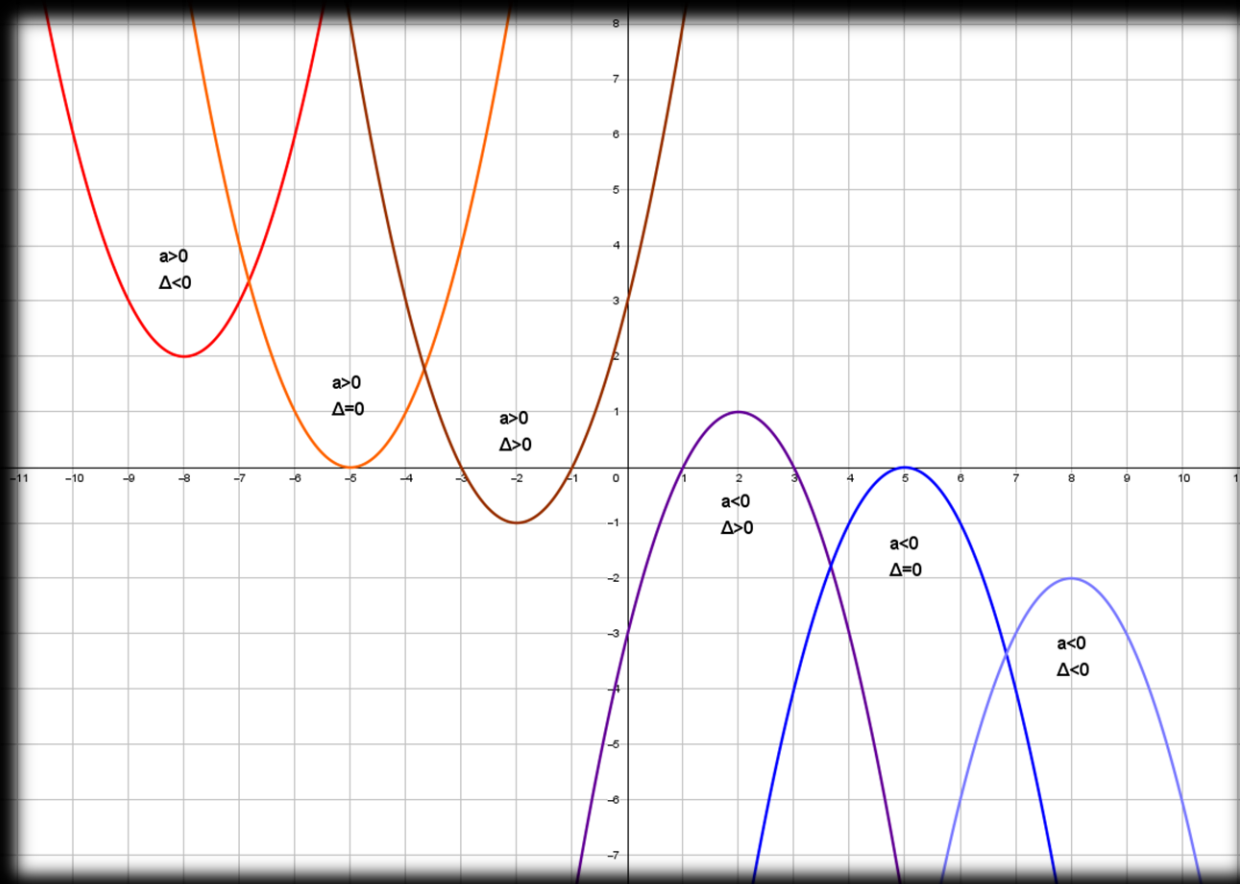
- Postać ogólna funkcji kwadratowej:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ .



## Dodatkowe informacje:

Wierzchołek paraboli może być wyznaczony w sposób alternatywny:

$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$  (jest „w połowie” pomiędzy miejscami zerowymi) i wyznacza symetralną paraboli, zaś  $q = f(p)$ .

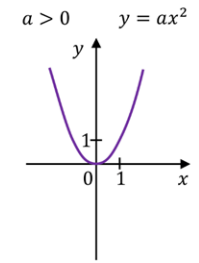
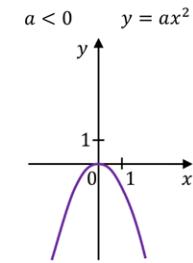


- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie



$$W = (p, q) \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy  $a < 0$ , to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy  $a > 0$ , to ramiona paraboli skierowane są ku górze.



- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$ ) zależy od wyróżnika  $\Delta$ :

- jeżeli  $\Delta > 0$ , to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeżeli  $\Delta = 0$ , to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli  $\Delta < 0$ , to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$



## Dodatkowe informacje:

W dowolnym ciągu  $a_n = S_n - S_{n-1}$ .

- W ciągu arytmetycznym, np. pomiędzy wyrazem 3, a 11 jest  $11 - 3 = 8$  różnic. Zatem  $a_3 + 8r = a_{11}$ .
- Jeżeli  $x, y, z$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to różnica pomiędzy nimi jest zawsze stała. Zatem  $y - x = z - y$ .
- Ciąg arytmetyczny jest funkcją liniową, określoną w zbiorze liczb naturalnych i „wygląda” jak ona: np.  $a_n = -2n + 3$
- W ciągu geometrycznym, np. pomiędzy wyrazem 3, a 11 jest  $11 - 3 = 8$  ilorazów. Zatem  $a_3 \cdot q^8 = a_{11}$ .
- Jeżeli  $x, y, z$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to iloraz pomiędzy nimi jest zawsze stały. Zatem  $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$ .
- Ciąg geometryczny jest funkcją wykładniczą, określoną w zbiorze liczb naturalnych i „wygląda” jak ona: np.  $a_n = 5^{2n-4}$ .

- Jeżeli  $\Delta \geq 0$ , to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Wzory Viète'a

Jeżeli  $\Delta \geq 0$ , to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### 8. CIĄGI

- Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ), określonego dla  $n \geq 1$ , o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$ :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę  $S_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego ( $a_n$ ), określonego dla  $n \geq 1$ , o pierwszym wyrazie  $a_1$  i ilorazie  $q$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$


- Wzory na sumę  $S_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu geometrycznego:


$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$





## Dodatkowe informacje:

Szereg zbieżny to ciąg geometryczny malejący. Iloraz musi być ułamkiem zwykłym. 

Wzór na procent składany jest zapisany dla rocznej kapitalizacji i rocznego oprocentowania. Jeżeli np. oprocentowane jest kwartalnie (są 4 kwartały w roku), to  $p$  dzielimy przez 4, zaś  $n$  mnożymy przez 4. 

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego  $(a_n)$  prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

- Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$ , określony dla  $n \geq 1$ , o ilorazie  $q$ . Niech  $(S_n)$  oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ , to znaczy ciąg określony wzorem  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  dla  $n \geq 1$ .

Jeżeli  $|q| < 1$ , to ciąg  $(S_n)$  ma granicę równą:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego  $(a_n)$ .

- Twierdzenie o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$ , określone dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , są zbieżne i  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , to ciągi  $(a_n + b_n)$ ,  $(a_n - b_n)$ ,  $(a_n \cdot b_n)$  są zbieżne, a ponadto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto  $b_n \neq 0$  dla  $n \geq 1$  oraz  $b \neq 0$ , to ciąg  $(\frac{a_n}{b_n})$  jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

- Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ciągów  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  i  $(c_n)$ , określonych dla  $n \geq 1$ , spełniają nierówność  $a_n \leq b_n \leq c_n$  dla  $n \geq 1$ , a ciągi  $(a_n)$  i  $(c_n)$  są zbieżne do wspólnej granicy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ , to ciąg  $(b_n)$  jest zbieżny, a ponadto  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ .

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy  $K_0$  złożymy na okres  $n$  lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi  $p\%$  w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy  $K_n$  jest określony wzorem:

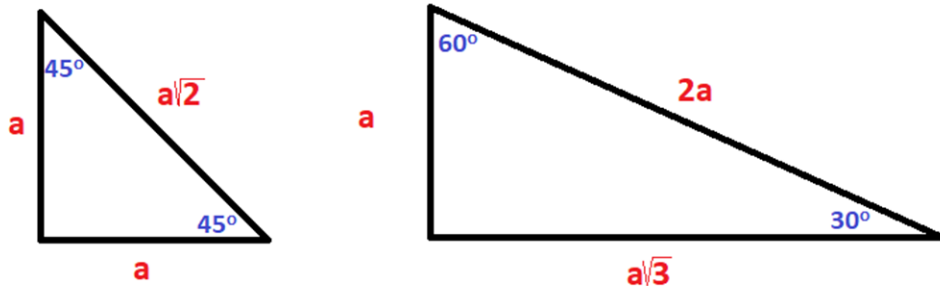
$$K_n = K_0 \cdot \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n$$



## Dodatkowe informacje:

- Sinus to stosunek przyprostokątnej leżącej na przeciw kąta do przeciwprostokątnej.
- Cosinus to stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie do przeciwprostokątnej.
- Tangens to stosunek przyprostokątnej leżącej na przeciw kąta, do drugiej przyprostokątnej.
- Cotangens to stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie, do drugiej przyprostokątnej i jest odwrotnością tangensa. ●

$$ctg \alpha = \frac{x}{y} \quad \bullet$$



- Wybrane granice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla każdego } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{dla każdego } q \in (-1, 1)$$

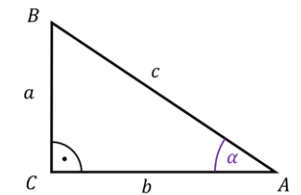
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{dla każdego } k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty \quad \text{dla każdego } k > 0$$

## 9. TRYGNOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

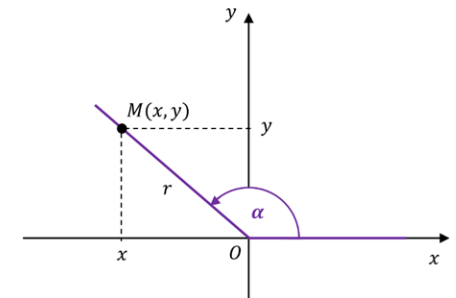
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$



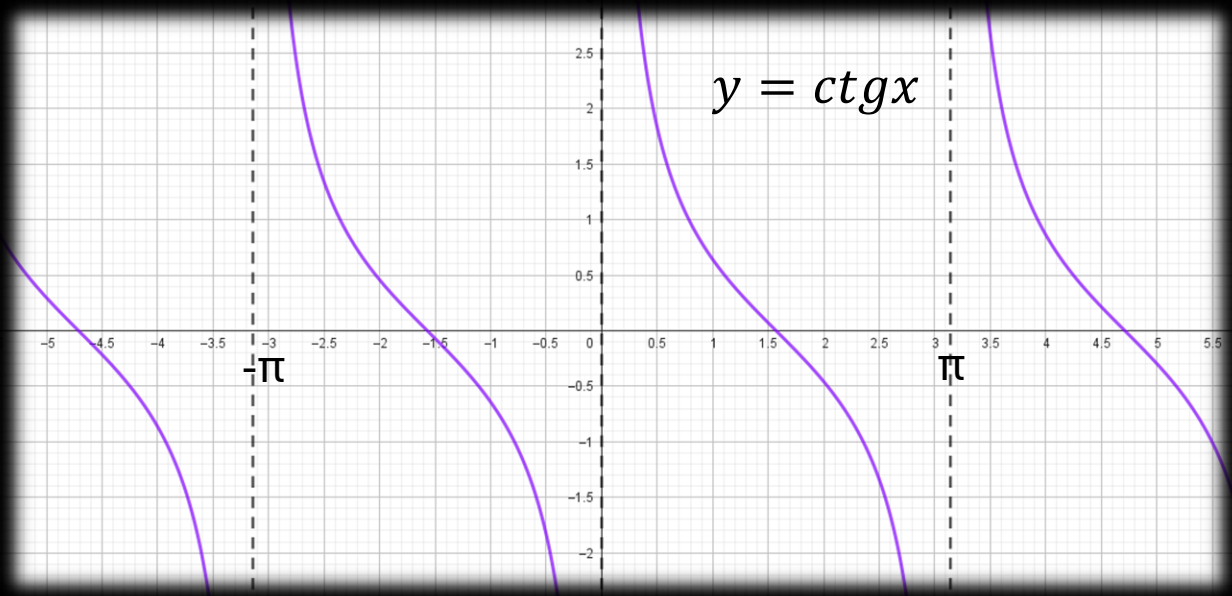
- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad \text{o ile } x \neq 0 \end{aligned}$$

gdzie  
 $r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$



## Dodatkowe informacje:



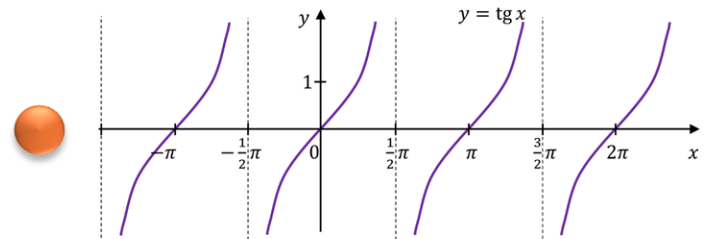
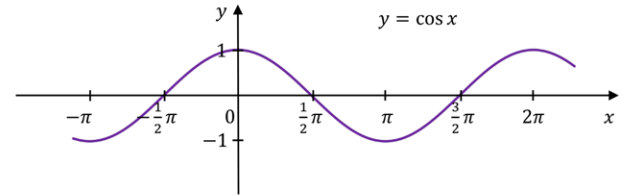
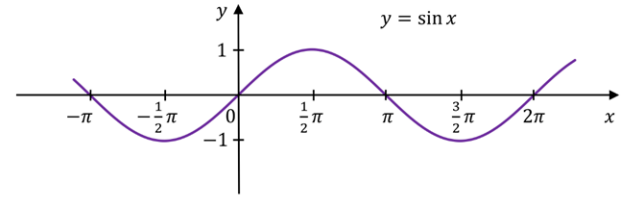
W mierze łukowej:  $\pi = 180^\circ$ .

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

- Wykresy funkcji trygonometrycznych




- Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



## Dodatkowe informacje:

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
 ctga	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Znaki funkcji trygonometrycznych w kolejnych ćwiartkach układu współrzędnych:

W pierwszej wszystkie są dodatnie,  
w drugiej tylko sinus,  
w trzeciej tangens i cotangens,  
a w czwartej cosinus.

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

$\alpha$	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg } \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów  $\alpha$  oraz  $\beta$  prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ponadto:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \text{gdy } \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \text{gdy } \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

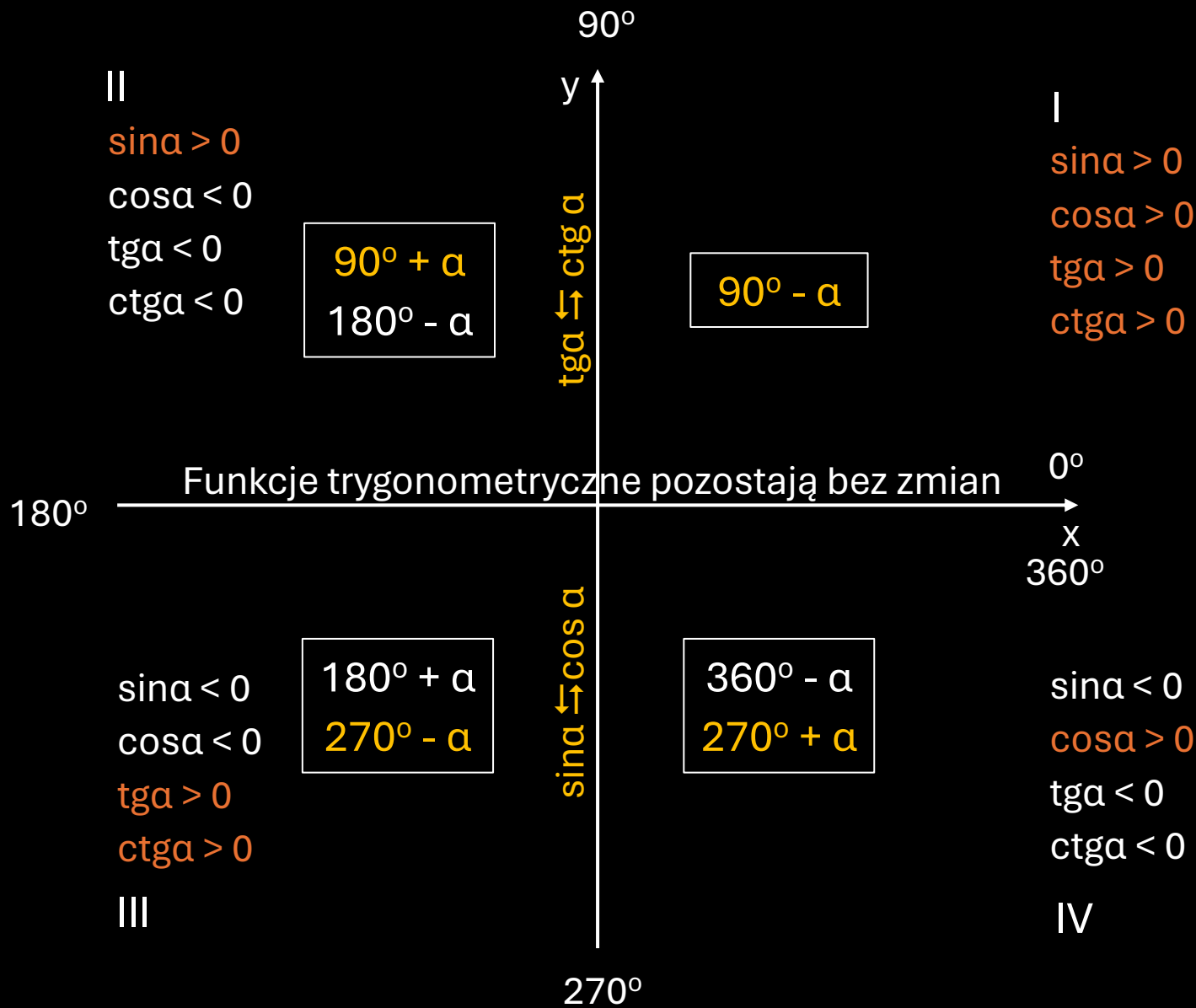
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} \quad \text{o ile } \text{tg } \alpha \text{ istnieje i } \text{tg}^2 \alpha \neq 1$$



Wybrane wzory redukcyjne

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

Okresowość funkcji trygonometrycznych

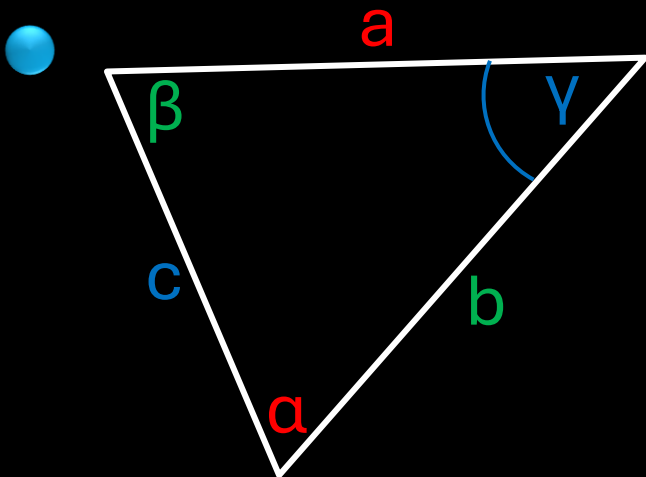
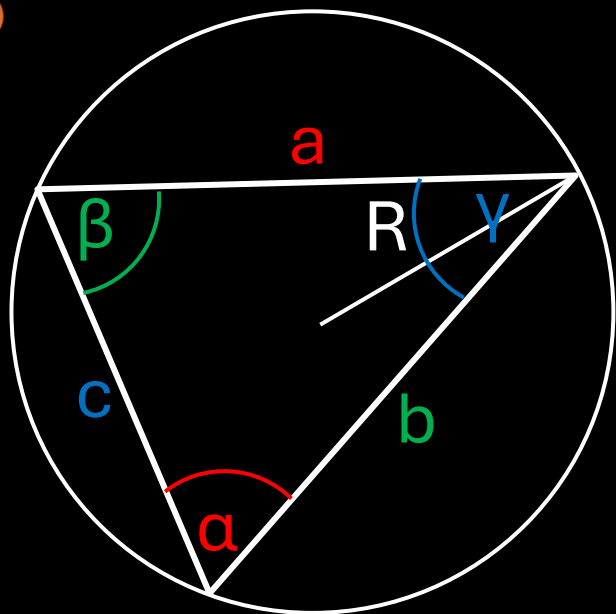
Dla każdego kąta  $\alpha$  i liczby całkowitej  $k$  prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \quad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

Ponadto jeżeli  $\alpha \neq 90^\circ + m \cdot 180^\circ$  (gdzie  $m \in \mathbb{Z}$ ), to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

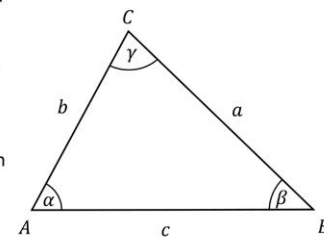




## 10. PLANIMETRIA

Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie  $ABC$ :

- $a, b, c$  – długości boków w trójkącie  $ABC$
- $\alpha, \beta, \gamma$  – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach  $A, B$  oraz  $C$
- $R, r$  – długości promieni okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt  $ABC$
- $h_a, h_b, h_c$  – wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków  $A, B$  i  $C$ .
- $p$  – połowa obwodu trójkąta  $ABC$ , tj.

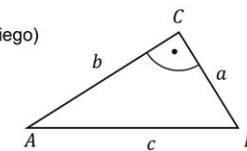


$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie  $ABC$  kąt  $\gamma$  jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Jeżeli w trójkącie  $ABC$  długości boków spełniają równość  $a^2 + b^2 = c^2$ , to kąt  $\gamma$  jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

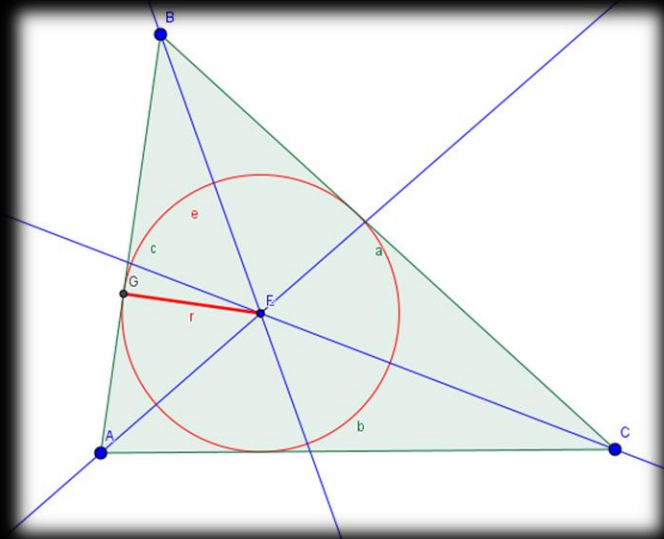
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

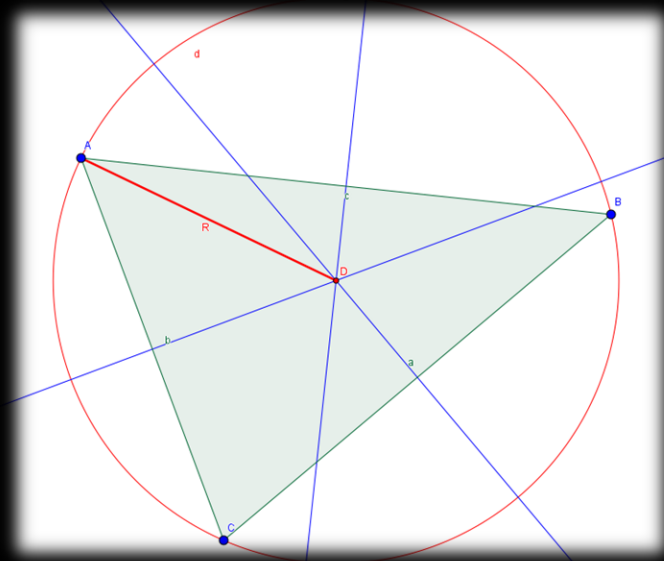
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

## Dodatkowe informacje:

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, leży na środku przeciwprostokątnej. 



Środek okręgu wpisanego w trójkąt, leży w punkcie przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie, leży w punkcie przecięcia się symetralnych boków trójkąta.

### Wzory na pole trójkąta $ABC$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \quad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

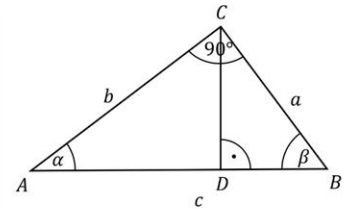
### Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $C$  jest kątem prostym. Niech  $D$  będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka  $C$  na podstawę  $AB$  trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

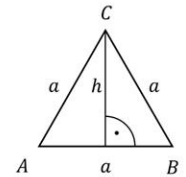


### Związki miarowe w trójkącie równobocznym

$a$  – długość boku trójkąta równobocznego  
 $h$  – wysokość trójkąta równobocznego

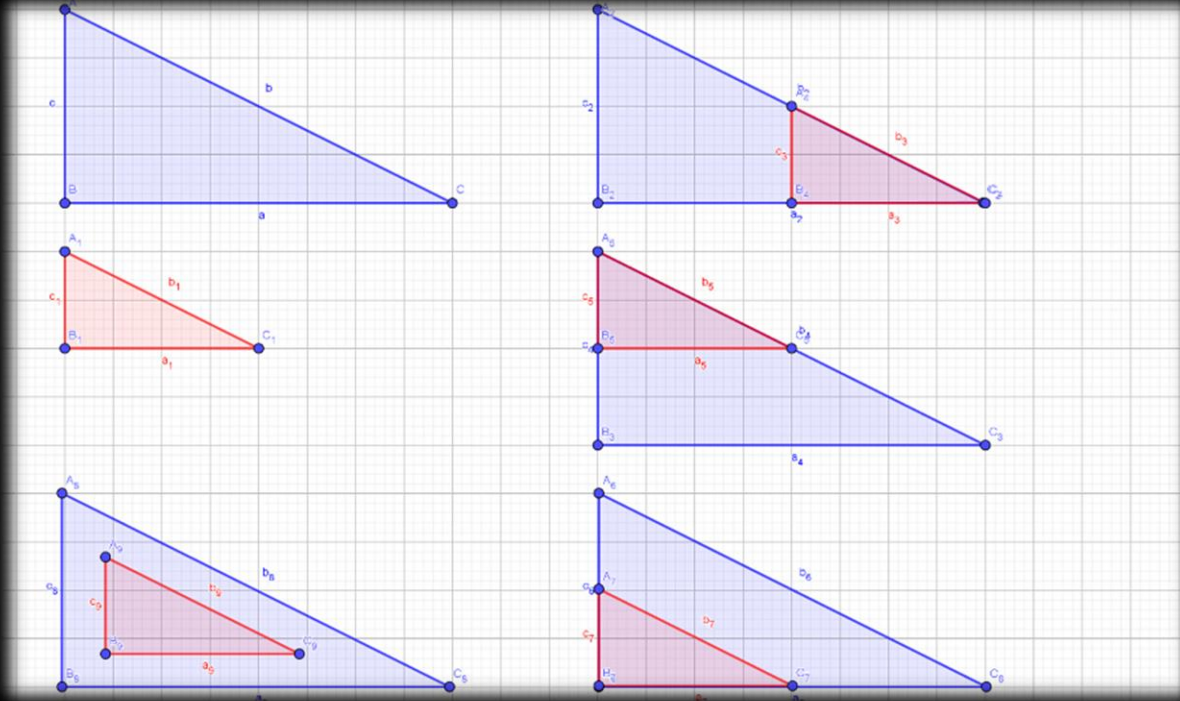
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \quad R = \frac{2}{3}h$$



# Dodatkowe informacje:

Zauważenie podobieństwa, ułatwia dopasowanie trójkątów wg. schematu:



## Cechy przystawania trójkątów



a) cecha przystawania „**bok-bok-bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długości boków trójkąta  $ABC$  są równe odpowiednim długościom boków trójkąta  $KLM$ , np.:  $|AB| = |KL|$ ,  $|BC| = |KM|$ ,  $|CA| = |ML|$

b) cecha przystawania „**bok-kąt-bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długości dwóch boków trójkąta  $ABC$  są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta  $KLM$  i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:  $|AB| = |KL|$ ,  $|BC| = |KM|$  i  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$

c) cecha przystawania „**kąt-bok-kąt**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długość jednego boku trójkąta  $ABC$  jest równa długości jednego boku trójkąta  $KLM$  i kąty przyległe do tego boku trójkąta  $ABC$  są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta  $KLM$ , np.:  $|AB| = |KL|$  oraz  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$  i  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$

## Cechy podobieństwa trójkątów



a) cecha podobieństwa „**bok-bok-bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długości boków trójkąta  $ABC$  są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta  $KLM$ , np.:  $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$

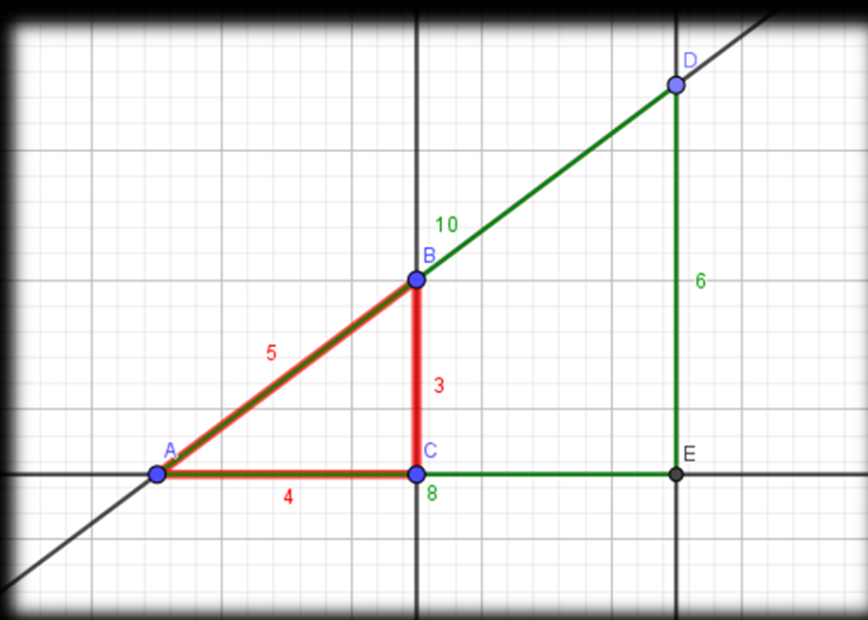
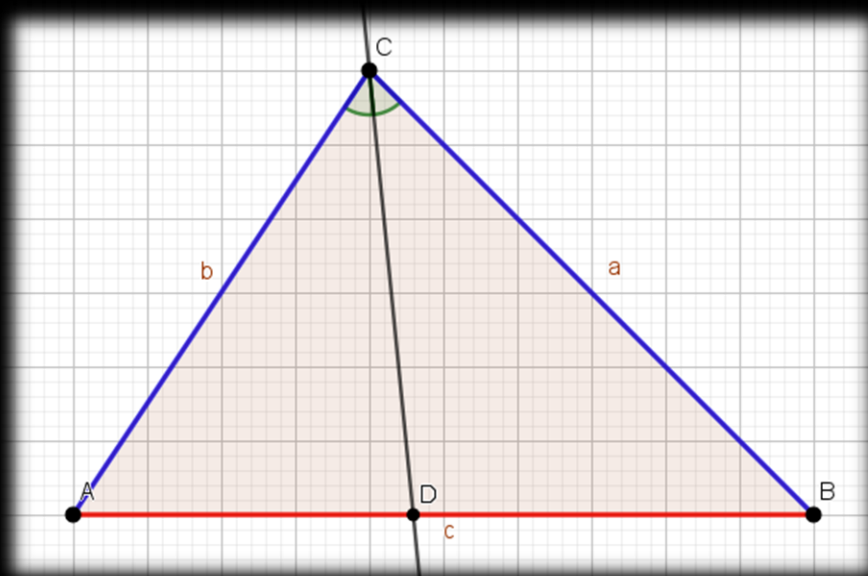
b) cecha podobieństwa „**bok-kąt-bok**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

długości dwóch boków trójkąta  $ABC$  są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta  $KLM$  i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:  $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$  i  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$

c) cecha podobieństwa „**kąt-kąt-kąt**” dla trójkątów  $ABC$  i  $KLM$ :

kąty trójkąta  $ABC$  są przystające do odpowiednich kątów trójkąta  $KLM$ , np.:  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$  i  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|$  i  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$





• Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnątrznego) trójkąta  $ABC$  poprowadzona z wierzchołka  $C$  przecina prostą zawierającą odcinek  $AB$  w punkcie  $D$ , to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

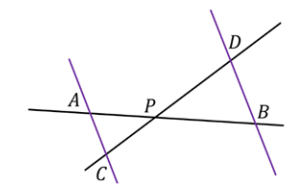
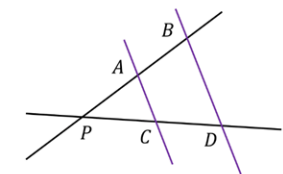
• Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Różne proste  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

- punkt  $A$  leży wewnątrz odcinka  $PB$  oraz punkt  $C$  leży wewnątrz odcinka  $PD$  LUB
- punkt  $A$  leży na zewnątrz odcinka  $PB$  oraz punkt  $C$  leży na zewnątrz odcinka  $PD$ .

Jeżeli  $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$ , to proste  $AC$  i  $BD$  są równoległe.

Jeżeli proste  $AC$  i  $BD$  są równoległe, to  $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$ .



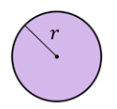
• Koło

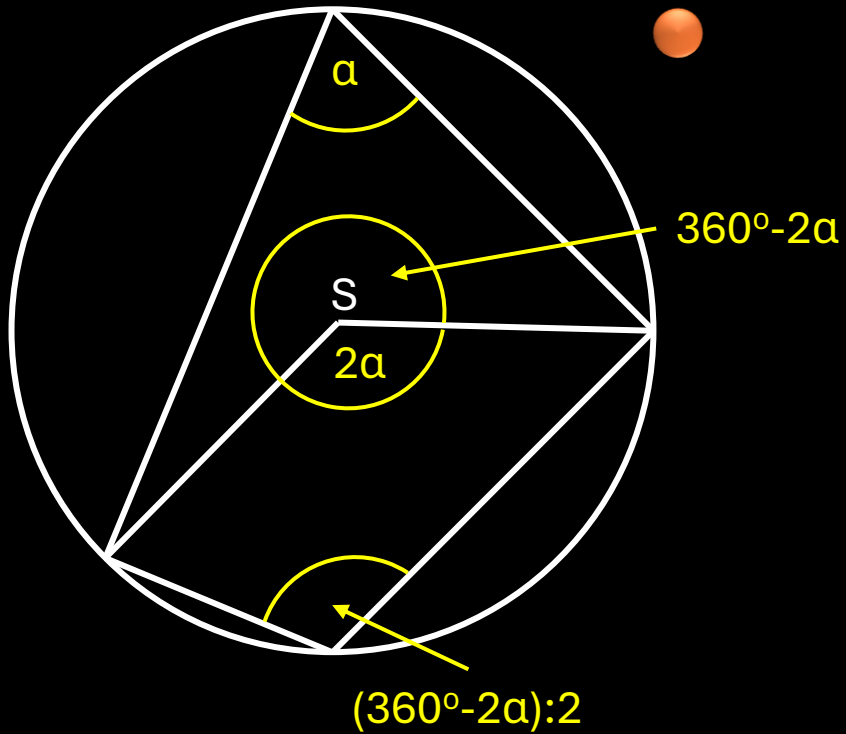
Pole  $P$  koła o promieniu  $r$  jest równe:

$$P = \pi r^2$$

Obwód  $L$  koła o promieniu  $r$  jest równy:

$$L = 2\pi r$$





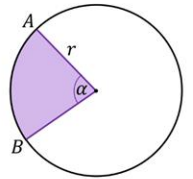
- Wycinek koła

Pole  $P$  wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$  wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość  $L$  łuku  $AB$  wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$  wyrażonym w stopniach jest równa:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

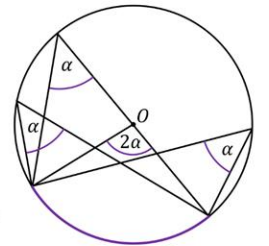


- Kąty w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku  $O$  jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku  $O$ , opartych na tym samym łuku, są równe.

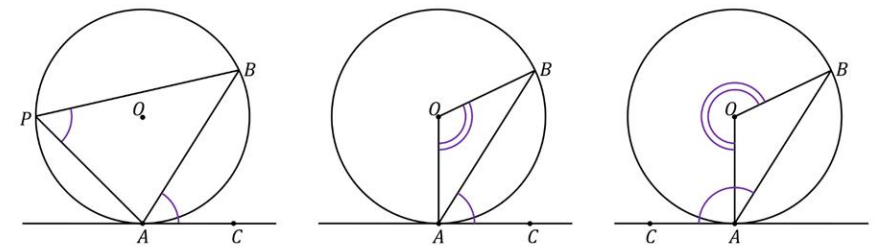


- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$  i cięciwa  $AB$  tego okręgu. Prosta  $AC$  jest styczna do tego okręgu w punkcie  $A$ , natomiast punkt  $P$  leży na tym okręgu i nie należy do kąta  $CAB$ . Wtedy:

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

przy czym wybieramy ten z kątów środkowych  $AOB$ , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta  $CAB$ .



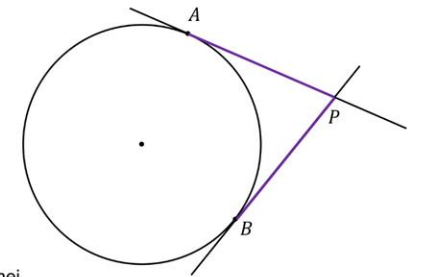
## Dodatkowe informacje: ●

- Przekątna kwadratu o boku  $a$ , wyraża się wzorem  $d = a\sqrt{2}$ .
- Suma kątów przy każdym z ramion trapezu wynosi  $180^\circ$ .

- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach  $A$  i  $B$  przecinają się w punkcie  $P$ , to:

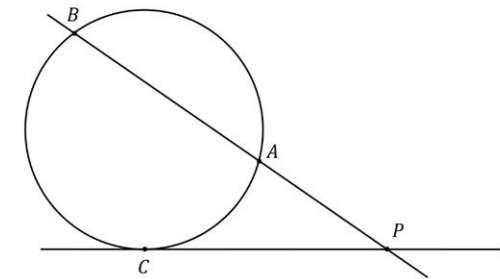
$$|PA| = |PB|$$



- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach  $A$  i  $B$  oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie  $C$ . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie  $P$ , to:

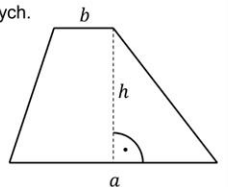
$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



- Czworokaty

● Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.  
Wzór na pole  $P$  trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



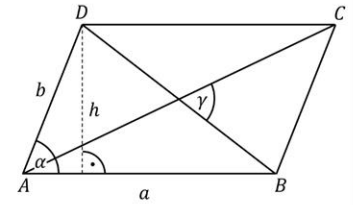
## Dodatkowe informacje:

- Przekątne rombu przecinają się dokładnie w połowie.



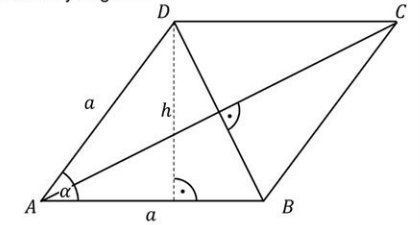
Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.  
Wzory na pole  $P$  równoległoboku:

$$P = ah \quad P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \gamma$$



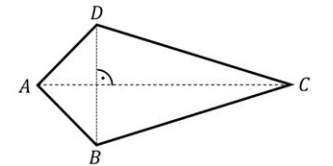
Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.  
Wzory na pole  $P$  rombu:

$$P = ah \quad P = a^2 \cdot \sin \alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.  
Wzór na pole  $P$  deltoidu:

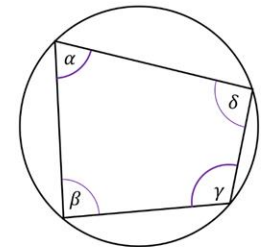
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



- Okrag opisany na czworokacie

Na czworokacie można opisać okrag wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwleglych katów wewnetrznych sa rowne  $180^\circ$ .

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$
$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \beta + \delta = 180^\circ$$



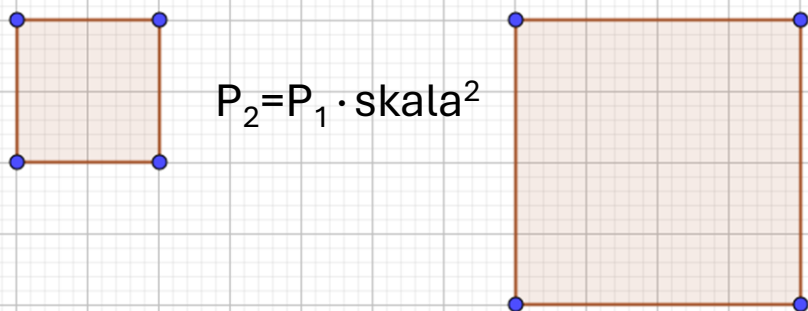
## Dodatkowe informacje:

- Pola figur zmieniają się proporcjonalnie do kwadratu skali.
- Objętości brył zmieniają się proporcjonalnie do sześciastu skali.

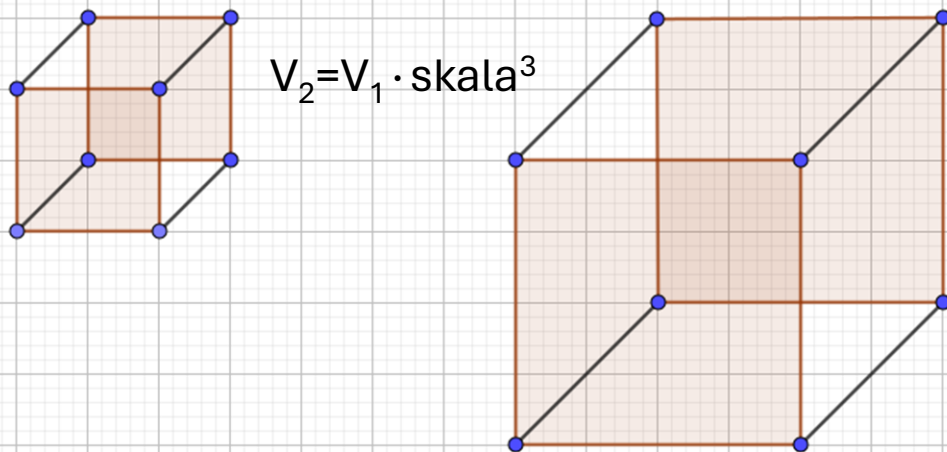
Długość


$$L_2 = L_1 \cdot \text{skala}$$

Pole


$$P_2 = P_1 \cdot \text{skala}^2$$

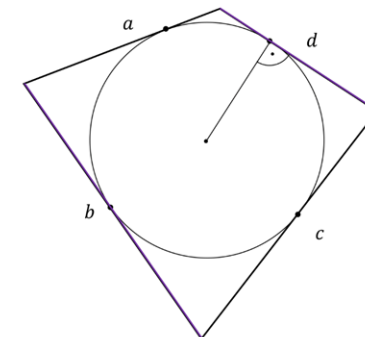
Objętość


$$V_2 = V_1 \cdot \text{skala}^3$$

- Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



- Pola figur podobnych

Jeżeli figura  $B$  o polu  $P_B$  jest podobna do figury  $A$  o polu  $P_A$  (różnym od zera) w skali  $k$ , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

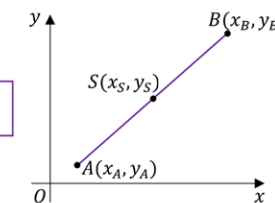
$$\frac{P_B}{P_A} = k^2$$

## 11. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

- Długość odcinka

Długość odcinka  $AB$  o końcach w punktach  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$  jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka  $S = (x_S, y_S)$  odcinka  $AB$  o końcach w punktach  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$  są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

## Dodatkowe informacje: ●

- Punkt przecięcia się wykresu dowolnej funkcji z osią  $x$ , wyznaczamy wstawiając 0 (zero) za  $y$ .
- Punkt przecięcia się wykresu dowolnej funkcji z osią  $y$ , wyznaczamy wstawiając 0 (zero) za  $x$ .

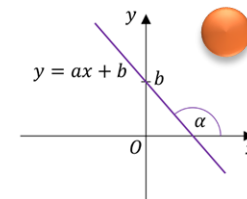
### • Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi  $Oy$ , to można opisać ją równaniem kierunkowym:

$$y = ax + b$$

Liczba  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Prosta o równaniu  $y = ax + b$  przecina oś  $Oy$  w punkcie  $(0, b)$ .

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym  $a$ , która przechodzi przez punkt  $P = (x_0, y_0)$ :

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$ :

$$\begin{aligned} & y - y_A = a(x - x_A) \\ \text{gdzie} & \quad a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{gdzie } x_B \neq x_A \end{aligned}$$

- Równanie ogólne prostej

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 \neq 0$$

Jeżeli  $A = 0$ , to prosta jest równoległa do osi  $Ox$ ; jeżeli  $B = 0$ , to prosta jest równoległa do osi  $Oy$ ; jeżeli  $C = 0$ , to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$ :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

## Dodatkowe informacje: ●

- Dwie proste są równoległe, gdy mają takie same współczynniki kierunkowe.
- Dwie proste są prostopadłe, gdy ich współczynniki kierunkowe są względem siebie przeciwne i odwrotne.

- Proste równoległe

● Dwie proste o równaniach kierunkowych  $y = a_1x + b_1$  oraz  $y = a_2x + b_2$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  oraz  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

- Proste prostopadłe

● Dwie proste o równaniach kierunkowych  $y = a_1x + b_1$  oraz  $y = a_2x + b_2$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste o równaniach ogólnych  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  oraz  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

- Odległość punktu od prostej

Odległość  $d$  punktu  $P(x_0, y_0)$  od prostej o równaniu ogólnym  $Ax + By + C = 0$  jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Równanie okręgu

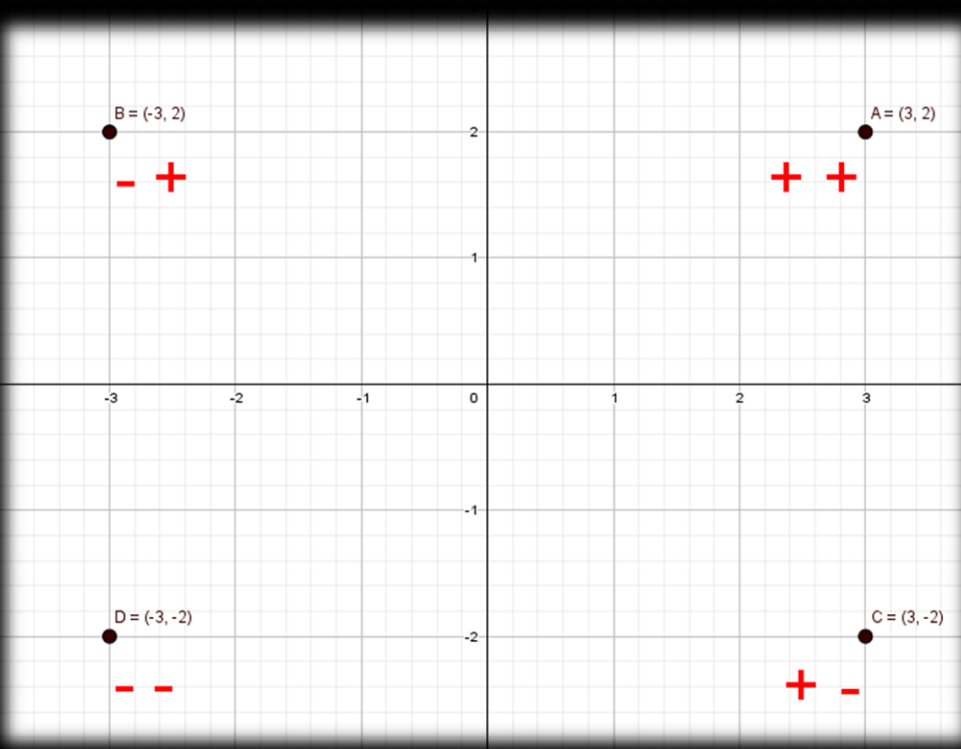
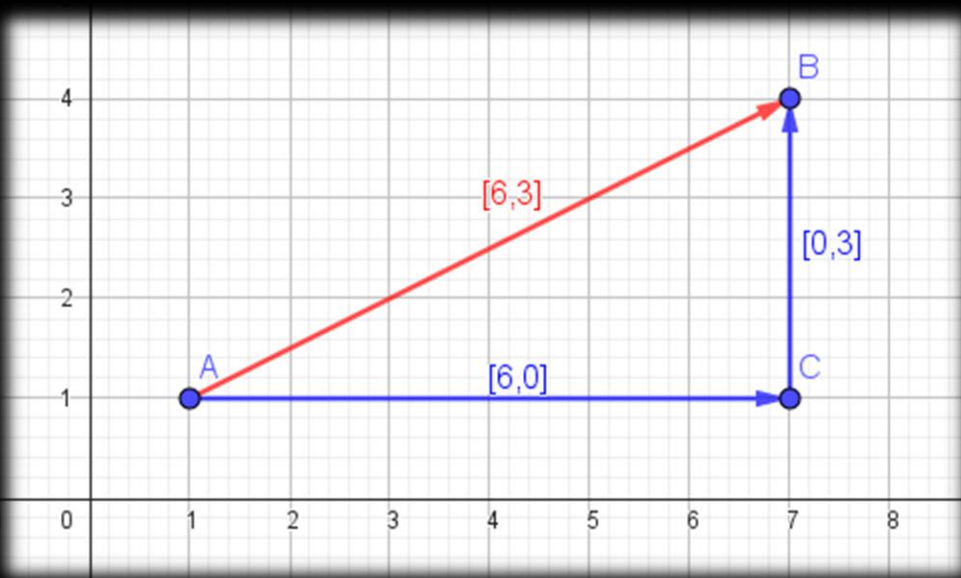
Równanie okręgu o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r > 0$  w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie okręgu o środku  $S = (a, b)$  i promieniu  $r > 0$  w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

gdzie  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .



• Współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach

Dane są punkty  $A = (x_A, y_A)$  oraz  $B = (x_B, y_B)$ . Współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$  zaczepionego w punkcie  $A$ :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli  $\vec{u} = [u_1, u_2]$  oraz  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  są wektorami oraz  $a \in \mathbb{R}$ , to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \quad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Długością  $|\vec{u}|$  wektora  $\vec{u} = [u_1, u_2]$  nazywamy liczbę

$$|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

• Przekształcenia geometryczne

Przesunięcie o wektor  $\vec{u} = [a, b]$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (x + a, y + b)$ .

Symetria osiowa  $S_{Ox}$  względem osi  $Ox$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (x, -y)$ .

Symetria osiowa  $S_{Oy}$  względem osi  $Oy$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (-x, y)$ .

Symetria środkowa  $S_K$  względem punktu  $K = (a, b)$  przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (2a - x, 2b - y)$ .

W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt  $P = (x, y)$  na punkt  $P' = (-x, -y)$ .

• Pole trójkąta

Pole trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  oraz  $C = (x_C, y_C)$  jest równe:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$





## Dodatkowe informacje: ●

- Graniastóp (ostrostóp) nazywamy prawidłowym, gdy jest prosty i ma w podstawie wielokąt foremny np. kwadrat, trójkąt równoboczny lub sześciokąt foremny.

- Współrzędne środka ciężkości trójkąta

Współrzędne środka ciężkości  $S = (x_S, y_S)$  trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  oraz  $C = (x_C, y_C)$ , czyli punktu przecięcia jego środkowych:

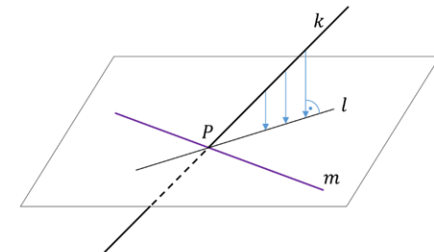
$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

## 12. STEREOMETRIA ●

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta  $k$  przebija płaszczyznę w punkcie  $P$  pod kątem ostrym. Prosta  $l$  jest rzutem prostokątnym prostej  $k$  na tę płaszczyznę. Prosta  $m$  leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt  $P$ .

Wówczas prosta  $m$  jest prostopadła do prostej  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m$  jest prostopadła do prostej  $l$ .



Przyjmujemy oznaczenia:

$P_c$  – pole powierzchni całkowitej

$P_b$  – pole powierzchni bocznej

$P_p$  – pole podstawy

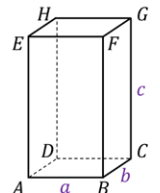
$V$  – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

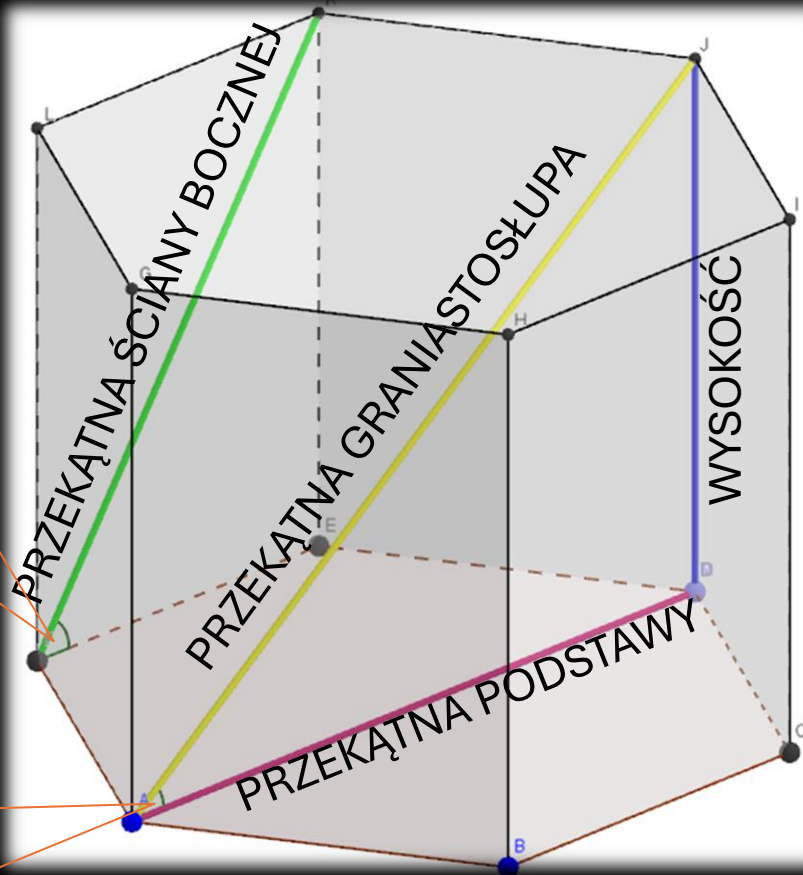
$$V = abc$$

gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są długościami krawędzi prostopadłościanu



KĄT NACHYLENIA  
PRZEKĄTNEJ  
ŚCIANY BOCZNEJ  
DO PODSTAWY

KĄT NACHYLENIA  
PRZEKĄTNEJ  
GRANIASTOSŁUPA  
DO PODSTAWY

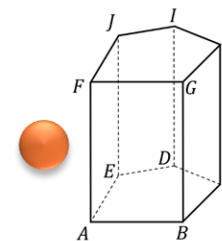


- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

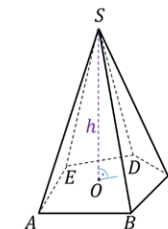
gdzie  $Ob$  jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast  $h$  – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie  $h$  jest wysokością ostrosłupa.



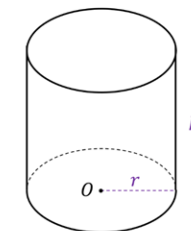
- Walec

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie  $h$  jest wysokością walca,  $O$  – środkiem symetrii podstawy walca,  $r$  – promieniem podstawy walca.



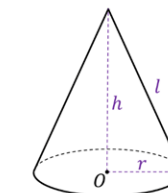
- Stożek

$$P_b = \pi r l$$

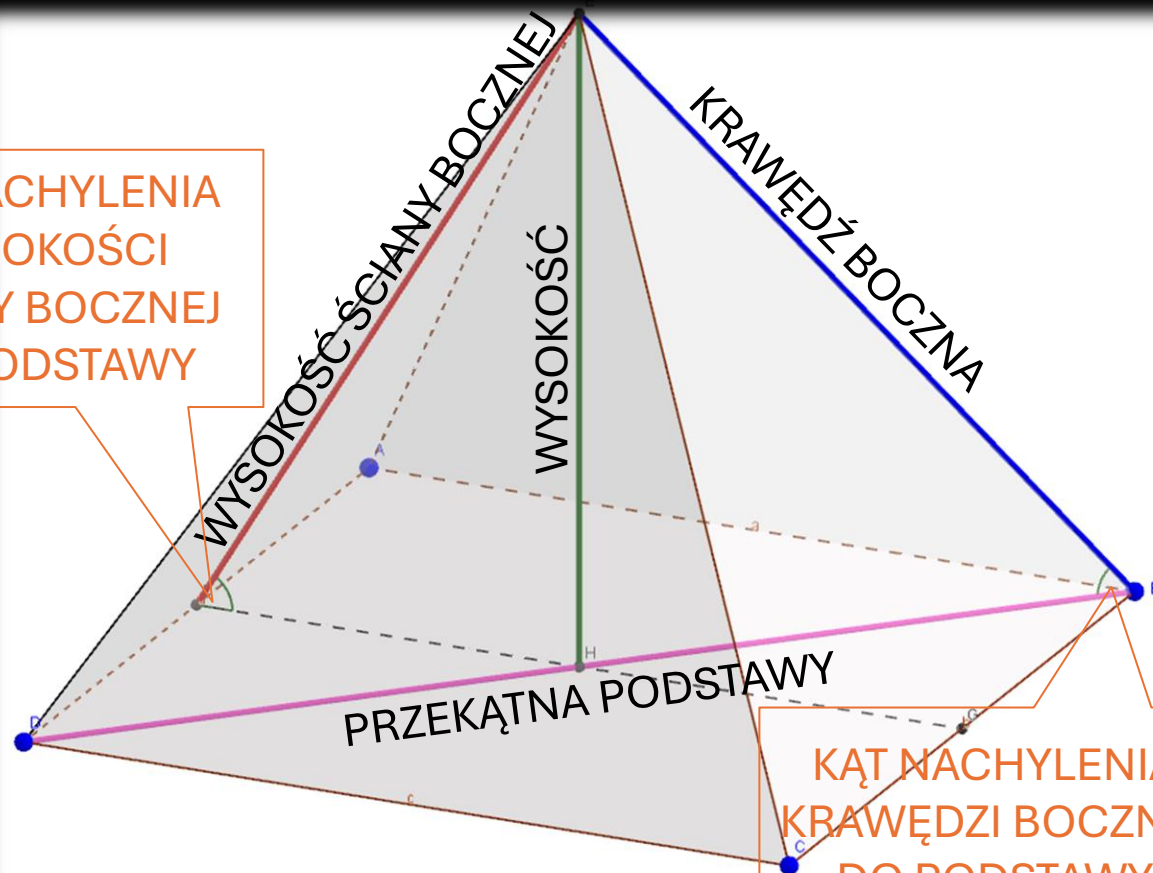
$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy stożka,  $h$  – jego wysokością, natomiast  $l$  – tworzącą stożka. Punkt  $O$  jest środkiem symetrii podstawy stożka.



KĄT NACHYLENIA  
WYSOKOŚCI  
ŚCIANY BOCZNEJ  
DO PODSTAWY



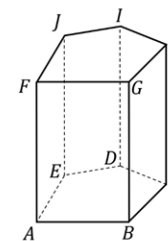
KĄT NACHYLENIA  
KRAWĘDZI BOCZNEJ  
DO PODSTAWY

- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

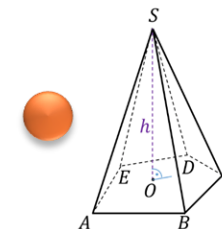
gdzie  $Ob$  jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast  $h$  – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie  $h$  jest wysokością ostrosłupa.



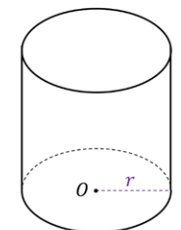
- Walec

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie  $h$  jest wysokością walca,  $O$  – środkiem symetrii podstawy walca,  $r$  – promieniem podstawy walca.



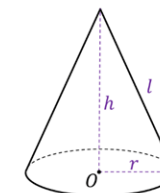
- Stożek

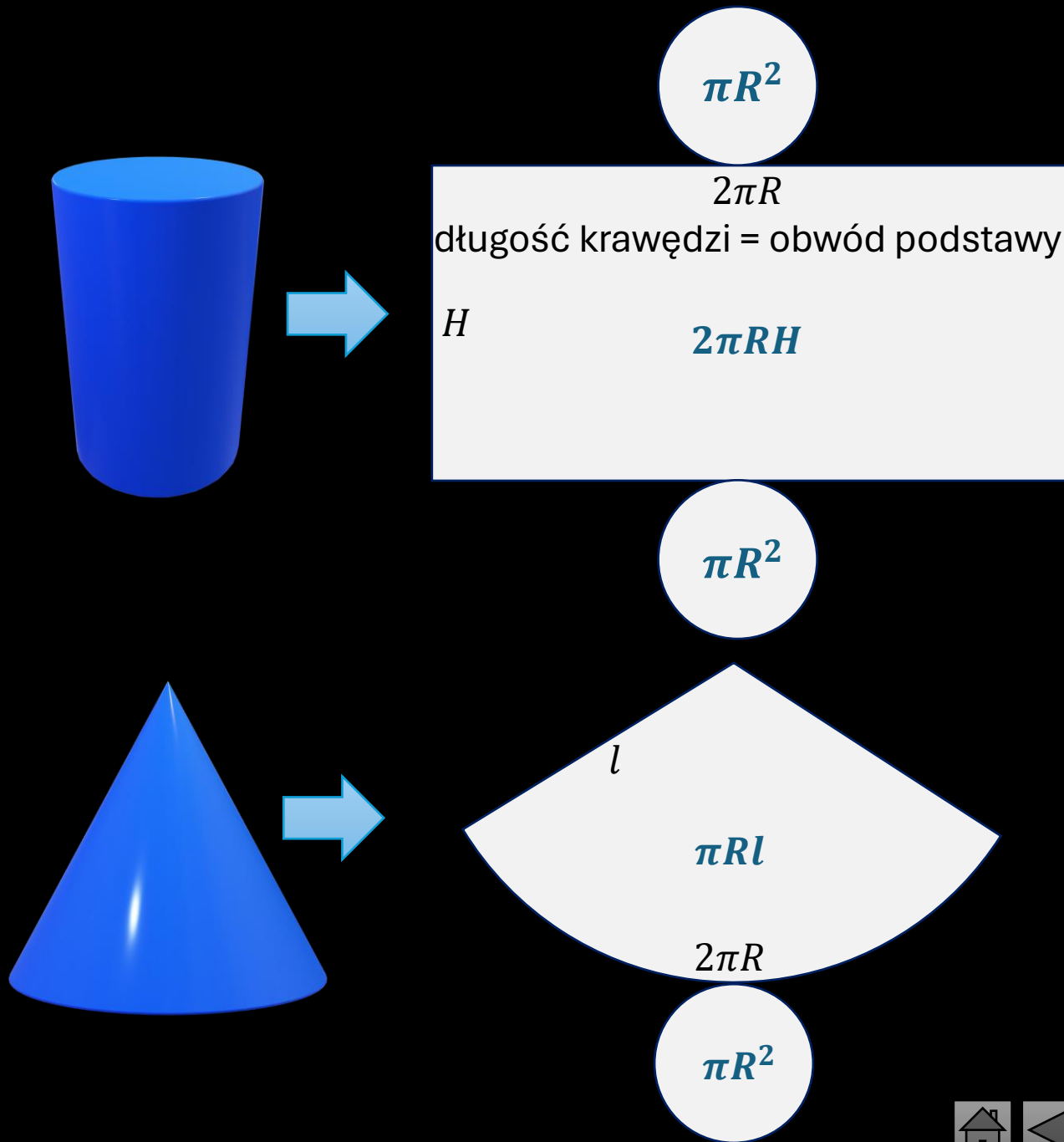
$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy stożka,  $h$  – jego wysokością, natomiast  $l$  – tworzącą stożka. Punkt  $O$  jest środkiem symetrii podstawy stożka.



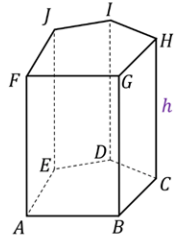


• Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

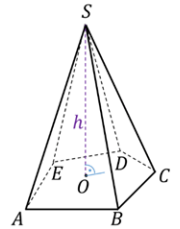
gdzie  $Ob$  jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast  $h$  – wysokością graniastosłupa.



• Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie  $h$  jest wysokością ostrosłupa.



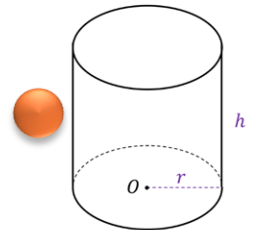
• Walec

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie  $h$  jest wysokością walca,  $O$  – środkiem symetrii podstawy walca,  $r$  – promieniem podstawy walca.



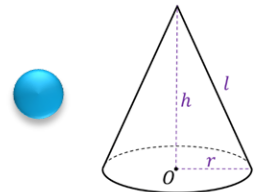
• Stożek

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy stożka,  $h$  – jego wysokością, natomiast  $l$  – tworzącą stożka. Punkt  $O$  jest środkiem symetrii podstawy stożka.



## Dodatkowe informacje: ●

$n$  – liczba wszystkich elementów zbioru

$k$  – liczba wybieranych elementów zbioru

$$P_n = n!$$

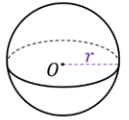
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Kula

$$P_c = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



gdzie  $r$  jest promieniem kuli, natomiast  $O$  – środkiem symetrii kuli.



### 13. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które  $n$  różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa  $n!$ .

- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród  $n$  różnych elementów można wybrać  $k$  elementów ( $0 \leq k \leq n$ ), jest równa  $\binom{n}{k}$ .

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z  $n$  różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa  $n^k$ .

- Wariacje bez powtórzeń

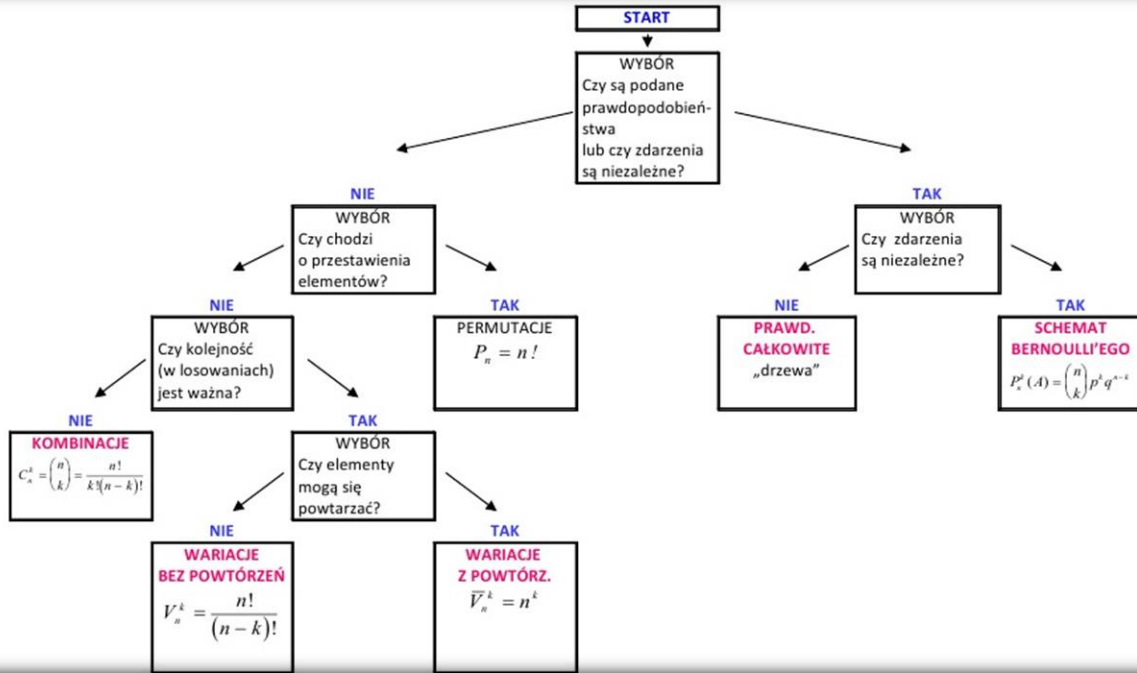
Liczba wszystkich sposobów, na które z  $n$  różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  różnych wyrazów ( $1 \leq k \leq n$ ), jest równa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$



# Dodatkowe informacje:

## Schemat ułatwia przypisanie wzoru do zadania.



### 14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

#### Własności prawdopodobieństwa

Niech  $\Omega$  będzie niepustym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, natomiast  $P$  – prawdopodobieństwem określonym na podziorach zbioru  $\Omega$ . Wtedy:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A \text{ oraz } B \text{ takich, że } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

#### Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech  $\Omega$  będzie niepustym skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego  $A$  jest równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie  $|A|$  oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu  $A$ , natomiast  $|\Omega|$  – liczbę elementów zbioru  $\Omega$ .

#### Schemat Bernoulliego

Próba Bernoulliego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe  $p$ , to prawdopodobieństwo porażki jest równe  $q = 1 - p$ .

Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoulliego. W schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo  $P_n(k)$  uzyskania w  $n$  próbach dokładnie  $k$  sukcesów ( $0 \leq k \leq n$ ) jest równe:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$



- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech  $A, B$  będą zdarzeniami losowymi zawartymi w  $\Omega$ , przy czym  $P(B) > 0$ . Prawdopodobieństwem warunkowym  $P(A|B)$  zdarzenia  $A$  pod warunkiem zaistnienia zdarzenia  $B$  nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zawarte w  $\Omega$  spełniają warunki:

1.  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są parami rozłączne, tzn.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2.  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3.  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego  $A \subset \Omega$  prawdziwa jest równość:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe  $A, B_1, B_2, \dots, B_n$  zawarte w  $\Omega$  spełniają warunki:

1.  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są parami rozłączne, tzn.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2.  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3.  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n$
4.  $P(A) > 0$

to dla każdego  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) prawdziwa jest równość:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$


- Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech  $X$  będzie zmienną losową o wartościach  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , określoną na zbiorze  $\Omega$ , przy czym  $P(\{\omega: \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$  dla  $1 \leq i \leq n$ . Wartością oczekiwaną zmiennej losowej  $X$  nazywamy liczbę:

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$



## Dodatkowe informacje:

Średnia ważona w przykładzie: 

Oceny	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	2	3	2	4	3	1
Wagi	3	3	2	1	1	2

Średnia ważona dodatkowo uwzględnia fakt, że np. są dwie jedynki, ale każda jest liczona trzykrotnie. Ten uczeń otrzymał  $2 \cdot 3 = 6$  jedynek.

$$\bar{x}_w = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}$$

$$\bar{x}_w = \frac{79}{28}, \text{ czyli } \bar{x}_w = 2,8$$

### 15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna  $\bar{a}$  z liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna  $\bar{g}$  z liczb nieujemnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Średnia kwadratowa

Średnia kwadratowa  $\bar{k}$  z liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n}}$$

- Nierówności między średnimi liczbowymi

Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będą liczbami nieujemnymi. Wtedy (przy powyższych oznaczeniach) prawdziwe są nierówności:

$$\bar{k} \geq \bar{a} \geq \bar{g}$$

Ponadto równość pomiędzy tymi średnimi liczbowymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

- Średnia ważona 

Średnia ważona  $\bar{s}$  z liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio:  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$



## Dodatkowe informacje:

Dominanta opisuje wartość najczęściej występującą w zbiorze danych. Dominantę również nazywa się modą.

Mediana zwana jest również wartością środkową zbioru. Mediana wskazuje, że część wyników ma wartość poniżej wartości mediany, a druga część ma wartość powyżej wartości mediany.

Odchylenie standardowe w przykładzie:

Uzyskaliśmy dane: 2,3,5,5,6,3,4.

Obliczamy średnią arytmetyczną:

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 5 + 5 + 6 + 3 + 4}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$s^2 = \frac{(2 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (5 - 4)^2 + (5 - 4)^2 + (6 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (4 - 4)^2}{7}$$

$$s = \sqrt{1,71} \approx 1,3$$



### • Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru  $n$  danych liczbowych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest:

– dla  $n$  nieparzystych:  $a_{\frac{n+1}{2}}$  (środkowy wyraz ciągu)

– dla  $n$  parzystych:  $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$  (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)



### • Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja  $\sigma^2$  danych liczbowych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o średniej arytmetycznej  $\bar{a}$  jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe  $\sigma$  jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

## 16. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

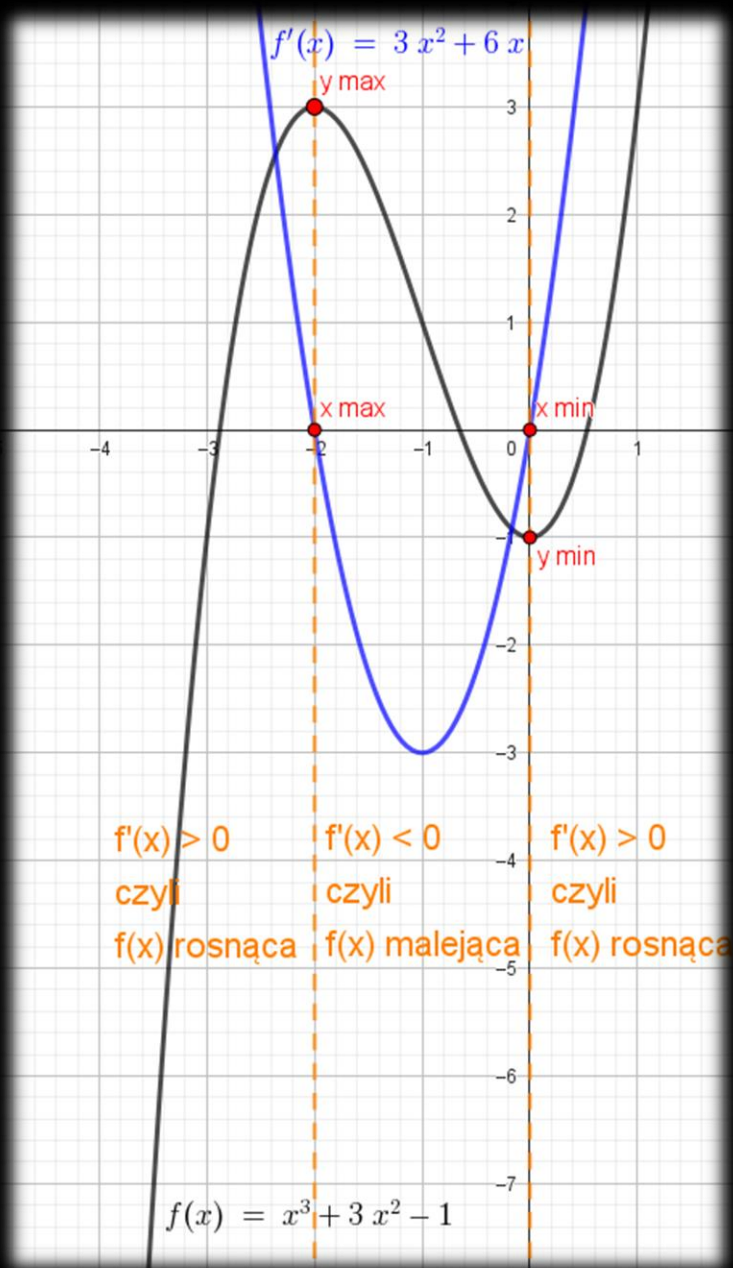
$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdy } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$



# Dodatkowe informacje:



- Pochodne wybranych funkcji

Niech  $a, b, c, r$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

gdzie  $e$  jest liczbą Eulera;  $e \approx 2,72$

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodną w punkcie  $x_0$ , to równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  dane jest wzorem:

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

gdzie

$$a = f'(x_0)$$



# Dodatkowe informacje:

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

## 17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

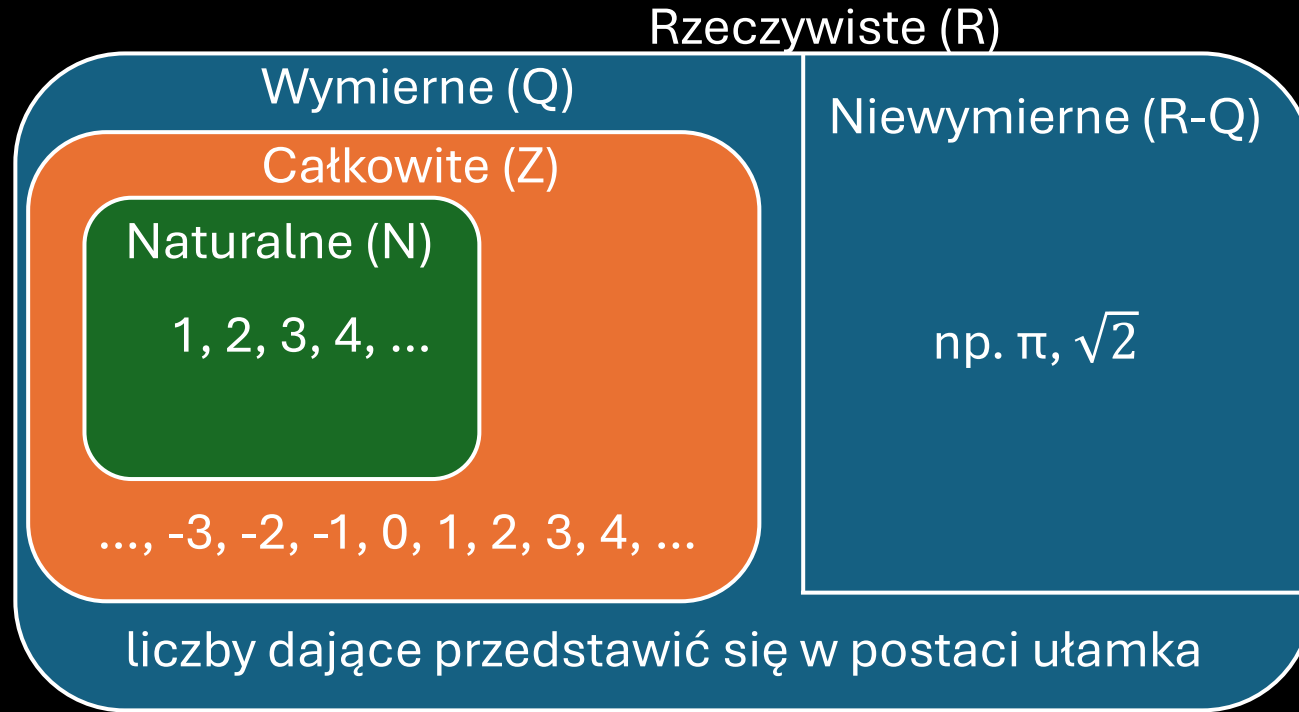
$\alpha$ [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$
<b>0</b>	<b>0,0000</b>	<b>1,0000</b>	<b>0,0000</b>
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
<b>5</b>	<b>0,0872</b>	<b>0,9962</b>	<b>0,0875</b>
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
<b>10</b>	<b>0,1736</b>	<b>0,9848</b>	<b>0,1763</b>
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
<b>15</b>	<b>0,2588</b>	<b>0,9659</b>	<b>0,2679</b>
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
<b>20</b>	<b>0,3420</b>	<b>0,9397</b>	<b>0,3640</b>
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
<b>25</b>	<b>0,4226</b>	<b>0,9063</b>	<b>0,4663</b>
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
<b>30</b>	<b>0,5000</b>	<b>0,8660</b>	<b>0,5774</b>
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
<b>35</b>	<b>0,5736</b>	<b>0,8192</b>	<b>0,7002</b>
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
<b>40</b>	<b>0,6428</b>	<b>0,7660</b>	<b>0,8391</b>
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
<b>45</b>	<b>0,7071</b>	<b>0,7071</b>	<b>1,0000</b>

$\alpha$ [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$
<b>45</b>	<b>0,7071</b>	<b>0,7071</b>	<b>1,0000</b>
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
<b>50</b>	<b>0,7660</b>	<b>0,6428</b>	<b>1,1918</b>
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
<b>55</b>	<b>0,8192</b>	<b>0,5736</b>	<b>1,4281</b>
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
<b>60</b>	<b>0,8660</b>	<b>0,5000</b>	<b>1,7321</b>
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
<b>65</b>	<b>0,9063</b>	<b>0,4226</b>	<b>2,1445</b>
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
<b>70</b>	<b>0,9397</b>	<b>0,3420</b>	<b>2,7475</b>
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
<b>75</b>	<b>0,9659</b>	<b>0,2588</b>	<b>3,7321</b>
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1446
<b>80</b>	<b>0,9848</b>	<b>0,1736</b>	<b>5,6713</b>
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
<b>85</b>	<b>0,9962</b>	<b>0,0872</b>	<b>11,4301</b>
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900
<b>90</b>	<b>1,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>-</b>



# Dodatkowe informacje, nie występujące w tablicach

## Zbiory liczbowe



Uwaga!

Zero może być traktowane jako liczba naturalna. Sprawdź dokładnie treść zadania.

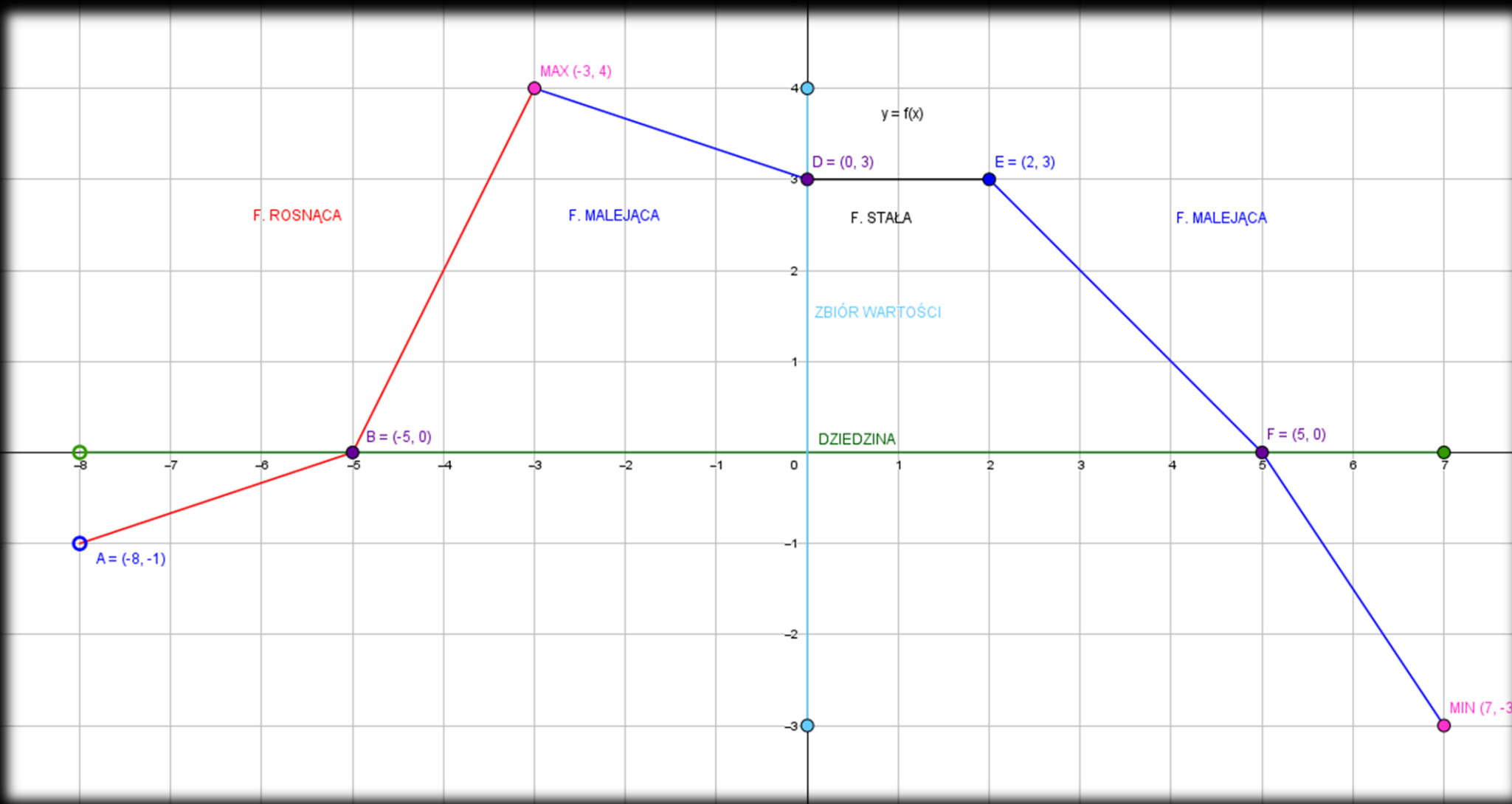
## Przedziały i nierówności

Znak nierówności	Nawias	Kółko (na osiach)	Linia (w układzie)
< lub >	(	○	-----
≤ lub ≥	<	●	_____

Nieskończoności, oznaczamy zawsze nawiasami okrągłymi.

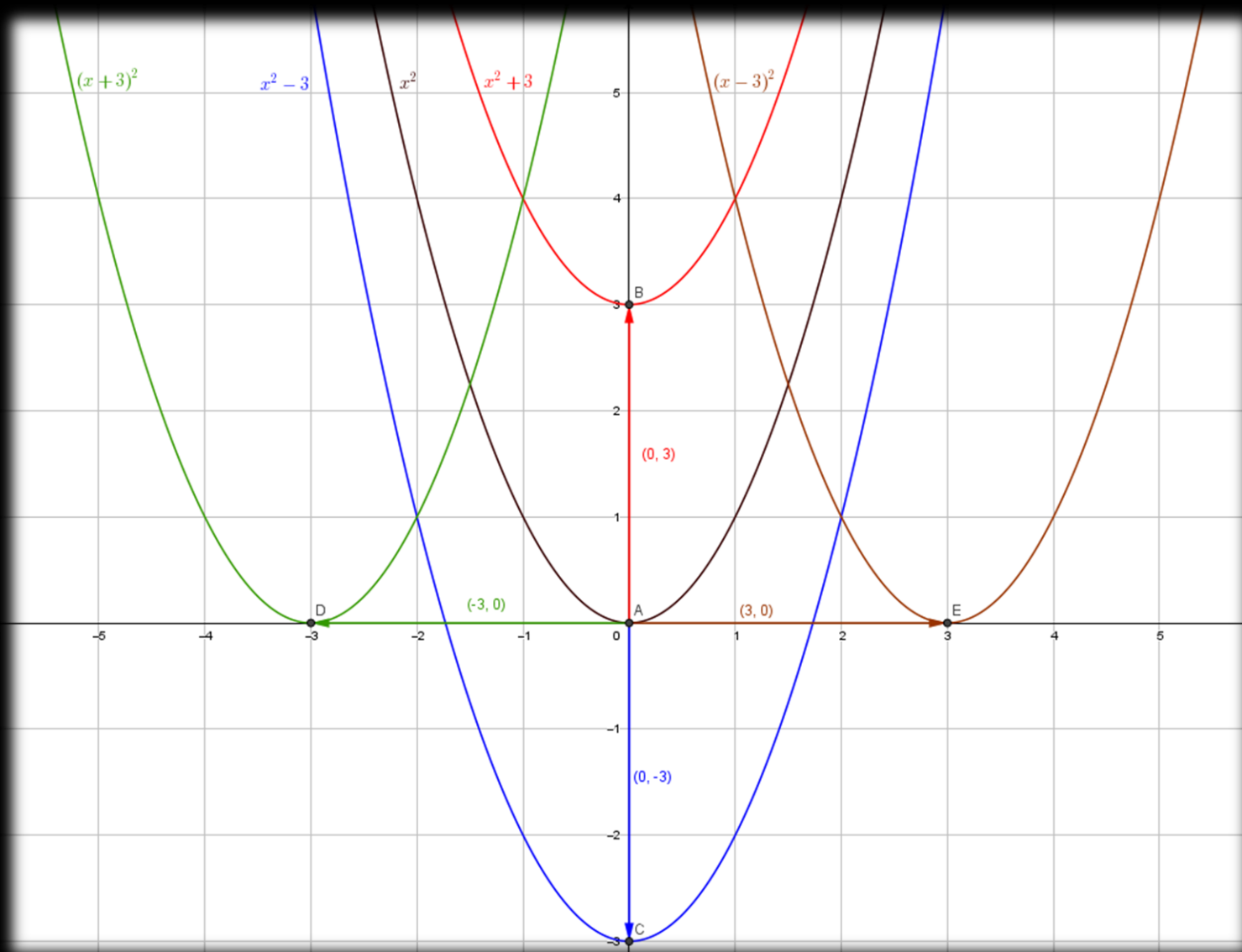
# Dodatkowe informacje, nie występujące w tablicach

## Własności funkcji



# Dodatkowe informacje, nie występujące w tablicach

## Przesunięcia wykresów funkcji



$f(x) + a$ , np.  $f(x) + 3$  w górę

$f(x) - a$ , np.  $f(x) - 3$  w dół

$f(x + a)$ , np.  $f(x + 3)$  w lewo

$f(x - a)$ , np.  $f(x - 3)$  w prawo